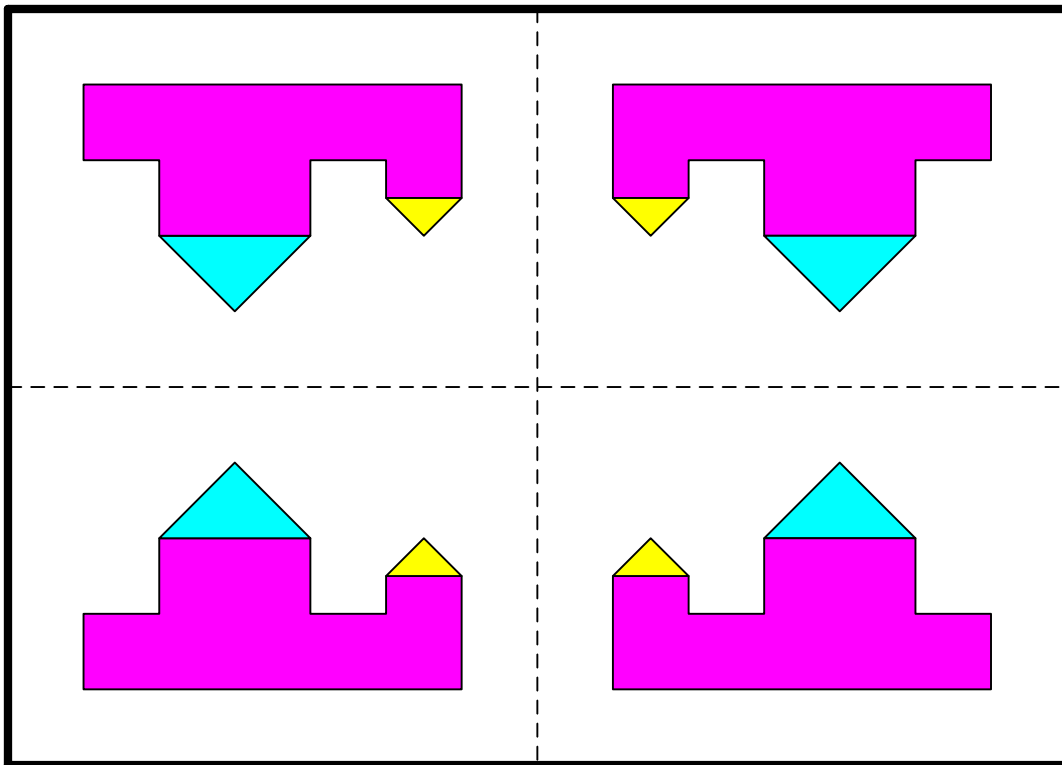


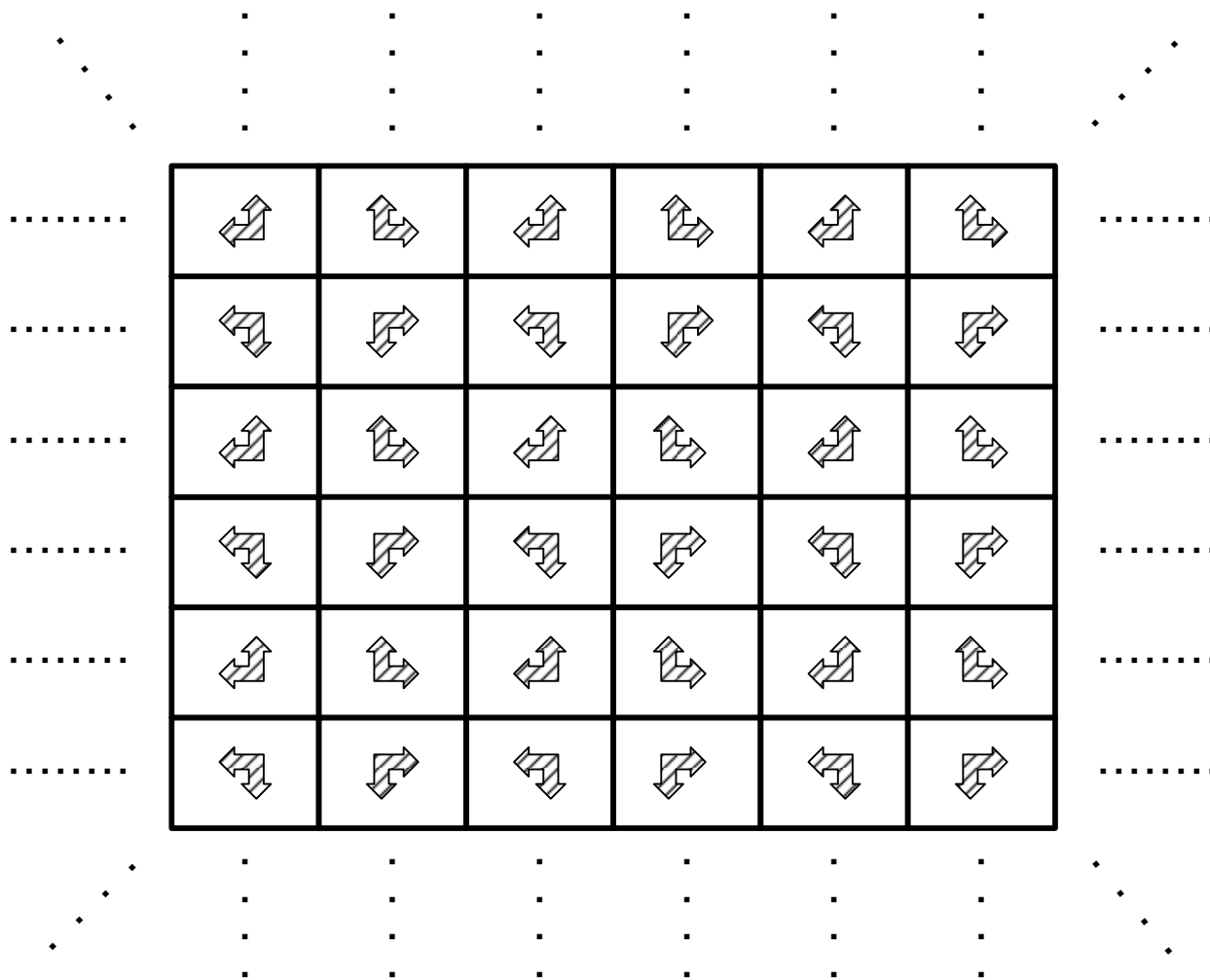
上記のような2次元矩形画像を考えます。
このとき下記のような図を想定してみましょう。
左右対称にした画像と上下対称にした画像と左右、上下とも対称にした画像を組み合わせたものになっています。



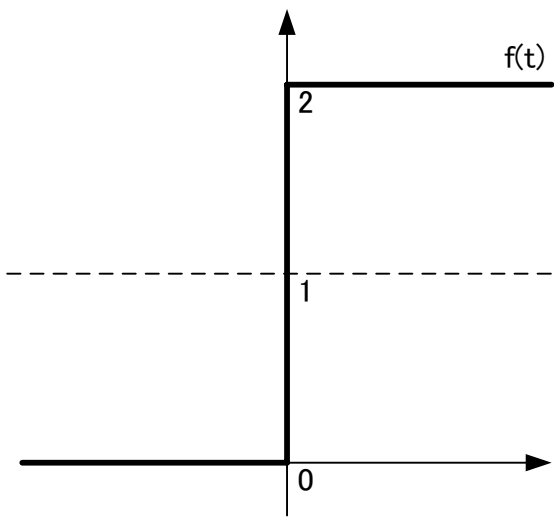
下記の長方形が画像だと思ってください。上下左右の関係を示すために矢印を入れてあります



この画像を下記のように上下左右にひっくりかえしながら永遠に並べることを考えます。

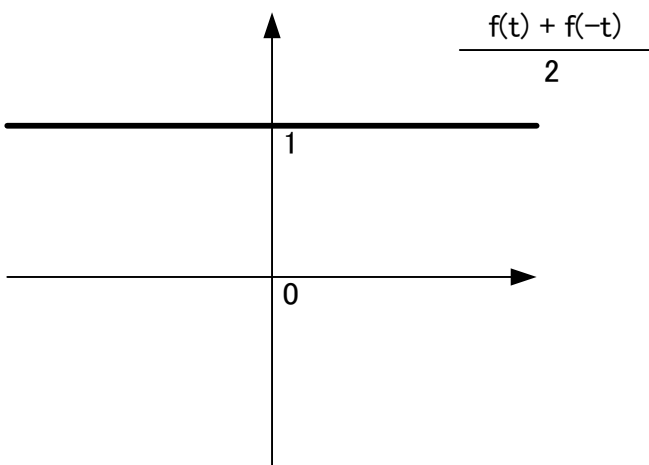


これでいったい何がしたいの？と言われそうですが我慢して最後までお付き合いください。

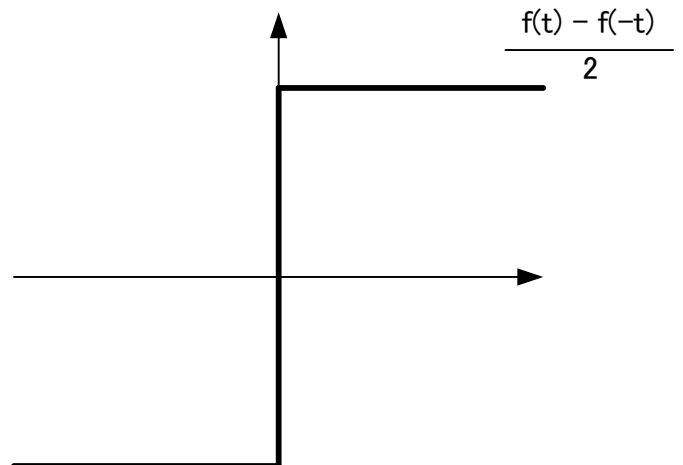


左記のような関数を考えます

$$f(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} + \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

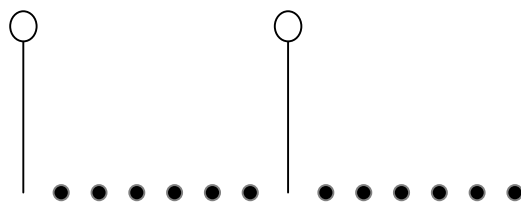


偶関数部



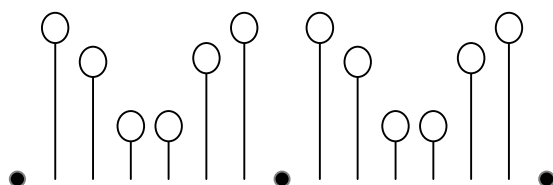
奇関数部

偶関数部、奇関数部に分けてそれぞれDFTをかけると
偶関数部は、複素周波数成分の実部になり、奇関数部は虚部になります。



偶関数部のDFTは直流分だけとなり左
図のようになります。

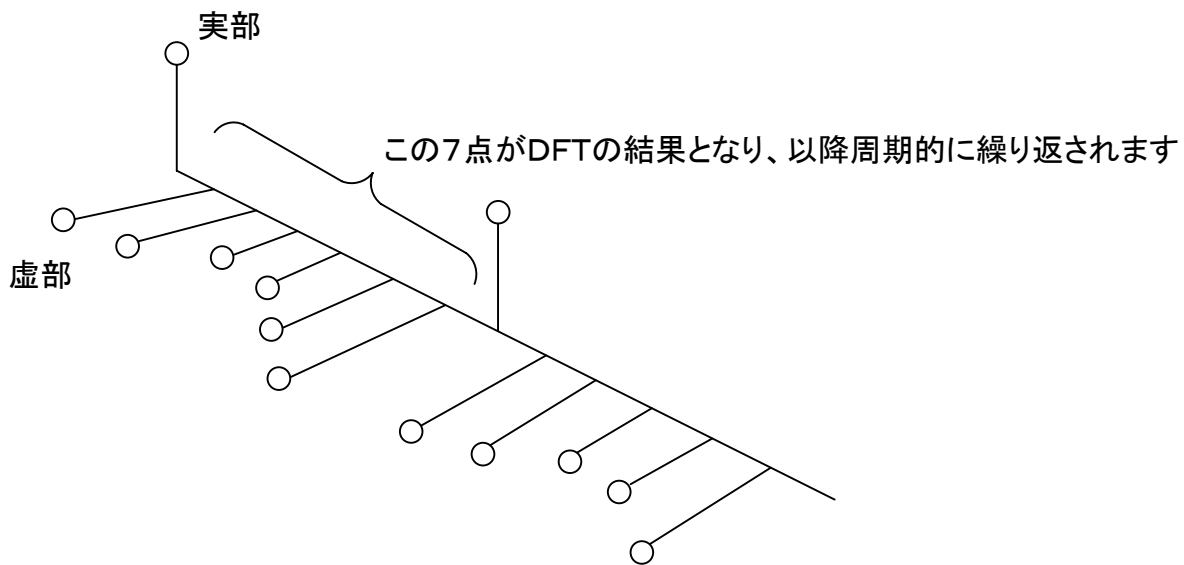
もちろん実部だけです



奇関数部のDFTは、左図のようになり
ます。

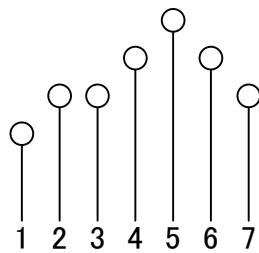
もちろん虚部だけです

ということはもとの関数 $f(t)$ のDFT結果は、この2つを合成して、次図のようになります

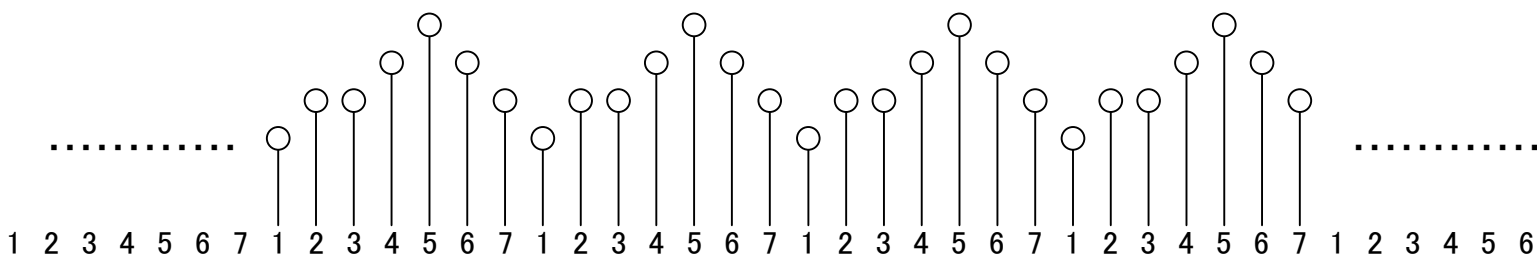


この話は、DCTが、偶関数に対するDFTの冗長性を省いたものであることを示すための導入になっています。

ここで、7ポイントの1次元DFTを次のサンプルにかけてみることを考えます。

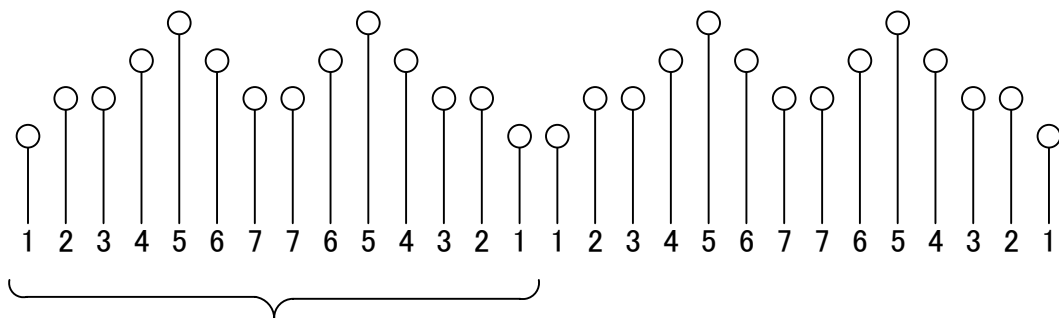


しかし、実際は次のような無限に続くサンプルに対してDFTをかけることになることはよろしいでしょうか？



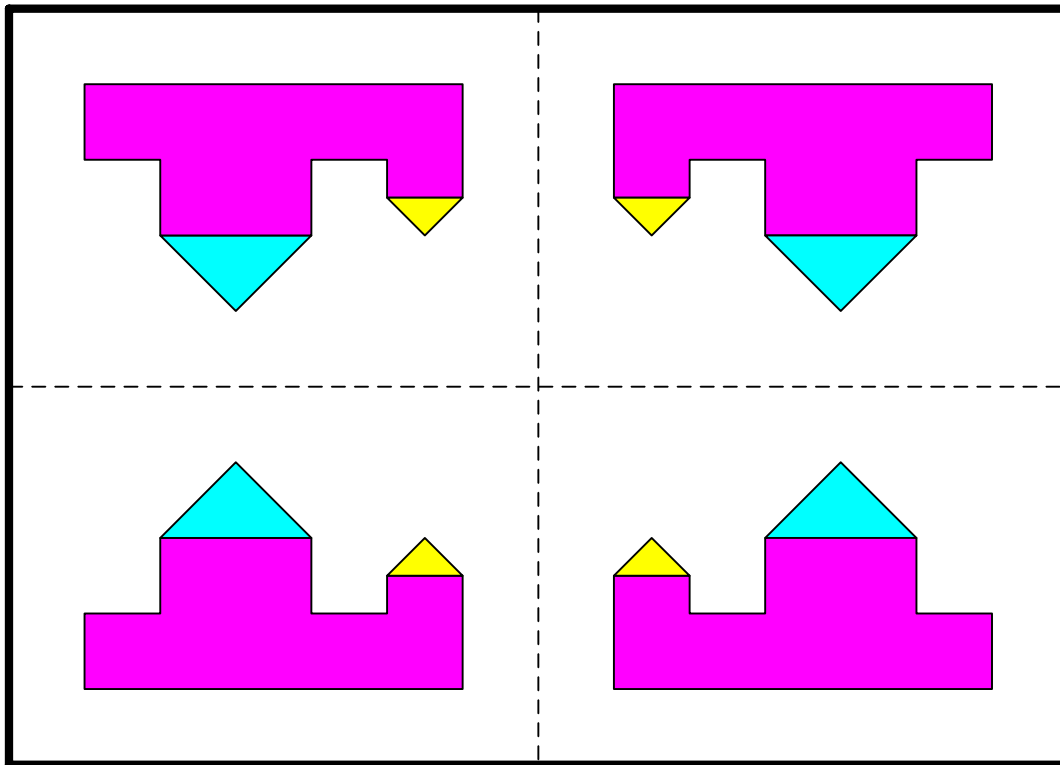
そして、フーリエ変換の結果もまた、周期的に繰り返すものになります。

さて、ここで1番目のサンプルと1番目のサンプル、7番目のサンプルと7番目のサンプルが隣合うように並べたらどうなるでしょうか？



この14点にDFTをかけることを考えると真ん中の2つの7の間を中心にして左右対称になっており偶関数に対してDFTをかけることになりま
す

ここで、フーリエ変換の基礎を思い出して頂きたいのですが、偶関数のフーリエ変換は偶関数かつ実数になります。ということは、14点のDFTを計算しなくても左半分の7点のデータだけで済むことがわかるでしょう。しかも、虚数部の計算はいりません。これが離散コサイン変換(DCT)です。



ここで、最初に登場した絵柄が再び登場します。
この絵柄の意味を考えてみましょう。

左右非対称のお城の絵はそれ1枚では右端と左端、上端と下端の連続性はありません。
この絵のように4枚の絵で構成した画像を1枚の絵と見なすと
その絵の特徴はどうなるでしょうか？
2つ特徴があります。

特徴1. 左右方向にも上下方向にも偶関数になっている

特徴2. この絵に対して左右上下にそれと同じ絵をならべていったとき
永遠に絵と絵の境界は連続である。

さて、お城1枚の絵に対して2次元DFTをかけるのと
お城4枚の絵に2次元DFTをかけるのと
どう違いがあるのでしょうか？

4枚の絵に2次元DFTをかけたほうが、特徴2の特徴があるために
良好なスペクトルが得られるのがわかります。
さらに特徴1の特徴があるために
前のページで述べた偶関数のフーリエ変換は偶関数かつ実数である
ということから、実際はお城ひとつの絵にDCTをかければ
4枚の絵にDFTをかけた結果と等価な結果が得られます

DCTのほうがDFTよりすぐれていることがわかるでしょう。

これがJPEGやMPEGにDCTが使われている理由です。

DCTというのはDFTの特殊な場合であることがわかりました

さて、いよいよサイズについて考えて見ましょう

画像の縮小は、帯域制限です
画像の拡大は、帯域拡大です

ただし、帯域拡大といっても元の画像には増えた
帯域の成分はありません
したがって0になります
フルーエンシ情報理論では
なめらかな帯域拡大を行い
この成分を作り出しています。
進歩しているといえるかもしれませんが
フーリエ理論、正弦波による補間理論では
拡大によってどんどん画像はぼけていきます

前置きが長くなりましたが

画像を2次元でDFTしたとき
高周波を削って
IDFTすると
LPFをかけたことになります
削った高周波成分
の数だけ
IDFTのサンプル数を減らすと
IDFTした結果は
画像の縮小になります。

逆にIDFTするサンプル数をふやして
増やした成分に0を入れると
IDFTした結果は
画像の拡大になります

余談ですが1次元でやれば
音声のピッチ変換になります。

画像の拡大縮小にDCTを使ったほうが良いわけは

今まで議論したとおりです

以上で私の話はおしまいです